

## 用图灵机求两个整数的最大公约数

本文拟设计一台图灵机解决计算两个整数最大公约数的问题。求最大公约数的问题可以简单叙述为：给定两个正整数  $a, b$ ，求它们的最大公约数。

解决该问题常采用辗转相减法，具体的算法描述如下：

1. 如果  $a=b$ ，则最大公约数即为  $a$  或者  $b$ ；
2. 如果  $a \neq b$ ，则将  $a, b$  两数相减，将差值存入被减数，减数不变；
3. 重复执行步骤 2，直到  $a, b$  两数相等为止，此时最大公约数即为  $a$  或者  $b$ 。

为方便的实现该算法，需要采用多带图灵机，本文采用 2 带图灵机来实现该算法。在实现之前，需要先做以下约定：

1. 在图灵机的带上用长度为  $a$  和  $b$  的 0 串分别表示正整数  $a, b$ ；
2. 初始时两个数分别位于两条带上，设  $a$  处于带 1 上， $b$  处于带 2 上；
3. 计算终止时两条带上的数据均为最大公约数。

实现该算法的 2 带图灵机可以表示为如下的 8 元组：

$$M=(Q, \{0\}, \Gamma_1, \Gamma_2, \delta, q_0, B, F)$$

其中  $Q$  为状态集合  $\{q_0, q_1, q_2, q_3, p\}$ 。

$\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  分别表示图灵机的两条带，带符号集合为  $\{0, B\}$ 。

初始状态为  $q_0$ ，终止状态  $F$  为  $p$ 。

转移函数  $\delta(q, \gamma_1, \gamma_2)$  的值定义为 5 元组  $(p, \gamma_1', \gamma_2', D_1, D_2)$ 。其中  $p$  是下一状态， $\gamma_1'$  是在第一条带的当前扫描单元中写下的符号， $\gamma_2'$  是在第二条带的当前扫描单元中写下的符号， $D_1$  和  $D_2$  分别表示控制器在两条带上的移动方向：L 为左移，R 为右移，S 为静止不动。

该图灵机的转移函数设计如下：

$$\begin{aligned}\delta(q_0, 0, 0) &= (q_0, 0, 0, R, R) \\ \delta(q_0, B, 0) &= (q_1, B, 0, L, L) \\ \delta(q_0, 0, B) &= (q_2, 0, B, L, L) \\ \delta(q_0, B, B) &= (p, B, B, S, S) \\ \delta(q_1, 0, 0) &= (q_1, 0, B, L, L) \\ \delta(q_1, B, B) &= (q_3, B, B, R, R) \\ \delta(q_2, 0, 0) &= (q_2, B, 0, L, L) \\ \delta(q_2, B, B) &= (q_3, B, B, R, R) \\ \delta(q_3, 0, B) &= (q_3, 0, B, S, R) \\ \delta(q_3, B, 0) &= (q_3, B, 0, R, S) \\ \delta(q_3, 0, 0) &= (q_0, 0, 0, S, S)\end{aligned}$$

该图灵机的计算过程可以描述为：

1. 初始状态下，控制器位于两个带的带头位置。根据转移函数  $\delta(q_0, 0, 0)=(q_0, 0, 0, R, R)$ ，当两个带上的数据都为 0 时，跳过当前元素右移，直到出现有一个带的当前带符号为  $B$  为止。
2. 若两个带上的符号均为  $B$ ，说明两个带上的数大小相等，即  $a=b$ 。此时有  $\delta(q_0,$

$B, B)=(p, B, B, S, S)$ , 图灵机进入接受状态  $p$ 。两条带上的数即为两数的最大公约数。

3. 若带 1 的符号为  $B$ , 带 2 的符号为 0, 说明  $a < b$ , 则应进行运算  $b-a$ 。由转移  $\delta(q_0, B, 0)=(q_1, B, 0, L, L)$ , 图灵机转入状态  $q_1$  并左移。接下来所做的工作是把带 2 中之前扫描过的 0 全部替换为空格符  $B$ , 而带 1 的数据不变, 只将控制头移动到数据头部。该过程通过转移函数  $\delta(q_1, 0, 0)=(q_1, 0, B, L, L)$  实现。该过程完成后带 2 中的数据即为  $b-a$  的值。
4. 若带 1 的符号为 0, 带 2 的符号为  $B$ , 说明  $a > b$ , 则应进行运算  $a-b$ 。类似于情况 3, 这一次将带 1 中之前的 0 替换为  $B$ , 过程完成后带 1 中的数据即为  $a-b$  的值。
5. 3 和 4 的过程结束时转入状态  $q_3$ , 此时两条带中有一条带上的控制头不位于数据头部, 通过转移函数  $\delta(q_3, 0, B)=(q_3, 0, B, S, R)$  和  $\delta(q_3, B, 0)=(q_3, B, 0, R, S)$  将控制头调整到数据头部。
6. 转入状态  $q_0$ , 重复情况 1, 实现辗转相减。

下面用一个具体的例子来演示该图灵机的工作过程。

问题: 给定两个正整数  $a=6$ ,  $b=4$ , 求它们的最大公约数。

解: 初始状态下, 两条带上的数据分别为 000000, 0000。用记号  $w_1qv_1+w_2qv_2$  作为图灵机的瞬时表示, 其中  $w_1, v_1$  为带 1 上的串,  $w_2, v_2$  为带 2 上的串,  $q$  为当前状态,  $v_1$  和  $v_2$  的第一个符号即为当前扫描的符号。则格局的变化为:

$q_0000000+q_00000 \mid 0q_000000+0q_0000 \mid 00q_0000+00q_000 \mid 000q_0000+000q_000 \mid 000q_0000+0000q_0B \mid 000q_2000+000q_20 \mid 00q_20B00+00q_200 \mid 0q_20BB00+0q_2000 \mid q_20B BB00+q_20000 \mid q_2BBBB00+q_2B0000 \mid q_3BBBB00+q_30000 \mid q_3BBB00+q_30000 \mid q_3B B00+q_30000 \mid q_3B00+q_30000 \mid q_300+q_30000 \mid q_000+q_0000 \mid 0q_00+0q_0000 \mid 00q_0B+00q_000 \mid 00q_0B+00q_00 \mid 0q_10+0q_1000 \mid q_100+q_10B00 \mid q_1B00+q_1BBB00 \mid q_300+q_3BB00 \mid q_300+q_3B00 \mid q_300+q_300 \mid q_000+q_000 \mid 0q_00+0q_00 \mid 00q_0B+00q_0B \mid 00pB+00pB$

到达接受状态  $p$  时两条带上的数据均为 2, 即得出结果 6 和 4 的最大公约数为 2, 计算完成。